جامعة البعث	امتحان هندسة تفاضلية	اسم الطالب : وسيم م...
كلية العلوم	سنة رابعة رياضيات (تحليل)	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	الفصل الثاني (٢٠١٦ - ٢٠١٧)	الفترة : ٩ - ١٠,٣٠

السؤال الأول : (50 درجة)

ليكن السطح المعين بالمعادلة : $r(u,v) = (u, v, u^2 - 2v^2)$ ، والمطلوب :

١) حدد طبيعة نقاط السطح وطبيعة الخطوط المقاربة على السطح .

٢) أوجد التقوسات الأساسية ومنحنيات التقوس للسطح في نقطة المبدأ($u = 0, v = 0$) منه .

٣) أوجد متجه وحدة المماس $\vec{T}$ ، ومتجه وحدة ثنائي الناظم $\vec{B}$ ، وتقوس والتفاف المنحني $u = v = t$ الواقع على السطح ، بين في أية نقطة من نقاط السطح يكون هذا المنحني جيوديزيا .

٤) اذكر النص والاثبات لمبرهنة بونييه للسطح النظامي .

السؤال الثاني : (35 درجة)

أولا- اثبت أن المشتق موافق التغير لدلتا كرونيكر معدوم في أي نظام احداثي($\delta^{k}_{j} = 0$).

ثانيا ليكن (ρ, θ, z) النظام الاحداثي الاسطواني والمطلوب :

١) اكتب من دون استنتاج صيغة التنسور المتري في هذا النظام ، ثم أوجد بدلالته طول المنحني المعطى بالمعادلة : $r(t) = (\rho = a, \theta = t, z = bt)$ ، $0 \le t \le c$

٢) ليكن T_{k}^{ij} تنسورا من النوع $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ مركباته معطاة في هذا النظام بالشكل :

$$T_1^{21} = T_2^{12} = T_3^{31} = T_3^{32} = T_1^{31} = T_2^{33} = \rho \text{ ، } T_1^{11} = T_2^{22} = T_3^{11} = z$$

بقية المركبات متساوية وتساوي $\rho\sin\theta$ والمطلوب :

أ) أوجد التنسور U^{i} الناتج عن تقليص التنسور T_{k}^{ij} بدليلية العلوي الأول والسفلي .

ب) أوجد المركبة للتنسور $T^{i12} = g^{i\alpha}T_{\alpha}^{12}$.

السؤال الثالث (15 درجة)

عرف المنطوي التفاضلي وبين أن كرة الواحدة $S^{n} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ هي منطو تفاضلي ذو n بعد .

مع تمنياتي بالنجاح	مدرس المقرر أ.د. محسن شيحة
حمص في ٢٠١٧/٦/١٤	

الاسم: [illegible] (كامل)

حل نموذجية لمقرر الهندسة التفاضلية سنة رابعة رياضيات

الفصل الثاني ٢٠١٦ - ٢٠١٧

$r(u,v) = (u, v, u^2 - 2v^2)$

$r_u = (1, 0, 2u)$, $r_v = (0, 1, -4v)$,

$E = (r_u)^2 = 1 + 4u^2$, $F = r_u \cdot r_v = -8uv$, $G = r_v \cdot r_v =$

$r_{uu} = (0, 0, 2)$, $r_{uv} = (0,0,0)$, $r_{vv} = (0, 0, -4)$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \frac{(-2u, 4v, 1)}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}},$$

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}}, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 0, \quad N = r_{vv} \cdot n = \frac{-4}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}}$$

1) $LN - M^2 = -8 < 0$ جميع نقاط السطح زائدية

$$II = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}} = 2du^2 - 4dv^2 = 0 \Rightarrow$$

$$du^2 = 2dv^2 \Rightarrow u = \mp\sqrt{2}\, v + C$$

2) لإيجاد التقوس الرئيسية نكتب معادلة التقوس الرئيسية في نقطة المبدأ

$$K^2(EG - F^2) - K(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0$$

بالتعويض في عبارات L, M, N, E, F, G عند $u = v = 0$ نجد،

$$K^2 + 2K - 8 = 0 \Rightarrow (K+4)(K-2) = 0 \Rightarrow K_1 = -4, K_2 = 2$$

منحنيات التقوس هي حلول المعادلة المصفوفية:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$du\,dv = 0 \Rightarrow u = C_1$, $v = C_2$ أي الخطوط الإحداثية هي الخطوط الرئيسية

3)

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{(1, 1, -2t)}{\sqrt{2+4t^2}}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$$

التقوس للمنحني المعطى

$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = 2\sqrt{2}$ [illegible]

[illegible]

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = [0 \; 1 \; b] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = [0 \; 1 b] \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

$$L = \int_0^c \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2} \cdot c$$

$$U^1 = T^{11}_1 + T^{21}_2 + T^{31}_3 = 2 + 2\rho \sin\theta$$

$$U^2 = T^{12}_1 + T^{22}_2 + T^{33}_3 = 2 + 2\rho \sin\theta = U^3$$

$$T^{122} = T^{12}_\alpha g^{\alpha 2} = T^{12}_1 g^{12} + T^{12}_2 g^{22} + T^{12}_3 g^{32} = \rho \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$$

ثالثاً

المطوي التفاضلي الأملس M^n هو فضاء تبولوجي فصول يحقق ما يلي:

← توجد في M^n مجموعة من الأطالس

[illegible]

متاجل أي خارطتين $(U, X), (V, Y)$ من الأطلس A، بحيث $U \cap V \neq \phi$ يكون التطبيق:

$$Y \circ X^{-1} : X(U \cap V) \longrightarrow Y(U \cap V) \; ; (x^1, \dots, x^n) \to (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots))$$

تطبيقاً أملس وأي يحقق $\left(\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0\right)$.

- الأطلس $A = \{(U_\alpha, X_\alpha) ; \alpha \in I\}$ أعظمي في M^n من أجل أي خارطة (W, Z) منسجمة مع A يجب أن تنتمي إلى A.

- لنأخذ الفضاء $\mathbb{R}^{n+1}$ والكرة الواحدية S^n المعرفة بمجموعة النقاط $(p^0, \dots, p^n)$ [illegible]

[illegible]

بالتوفيق

ملاحظات: $\Pi_S(S^n \setminus S) = \mathbb{R}^n$.

الخارطتان $(S^n \setminus N ; \Pi_N)$ ، $(S^n \setminus S , \Pi_S)$ تشكلان أطلساً ،

لذا فان S^n تمثل منطوياً تبولوجياً ذا n البعد ،

لنأخذ التطبيق $\Pi_S \circ \Pi_N^{-1}$ ولنجد عبارة y^i بدلالة x^i .

نعوض في العلاقة :

P_i بدلالة x^i وبحساب بسيط نجد أن :

$$\frac{p^i}{x^i} + \frac{p^i}{y^i} = 2$$

$$y^i = \frac{x^i}{\sum_{i=1}^{n} x^{i\,2}}$$

وان $\Pi_S \circ \Pi_N^{-1}$ هو تطبيق أملس .

بالتالي فان S^n منطو تفاضلي ذو n البعد .

انتهت الاجوبة